

Úloha č. 2 - Difrakce světelného záření

Difrakci světla lze charakterizovat jako chování vlnových polí, které není možné popsat pomocí zákonů geometrické optiky. Lze ji přiblížit jako ohyb nebo odchylku světelných vln od přímočarého šíření. K difrakci dochází v místech, kde je vlna při svém šíření příčně omezena prostředím. Překážku nebo omezení představuje v prostředí změna absorpce, vodivosti nebo indexu lomu v příčném směru vůči šíření vlny. Typickým příkladem může být malý kruhový otvor v neproputném tenkém stínítku. Světlo prošlé otvorem se ohýbá a v určité vzdálenosti za stínítkem lze pozorovat difrakční obrazec ve tvaru soustředných kružnic, které se vyskytují i v místech geometrického stínu otvoru. Efekt difrakce se nejvíce projevuje na objektech, jejichž velikost je srovnatelná s vlnovou délkou světla.

1 Teoretický úvod

Úkolem difrakční úlohy je zjistit stav vlnového pole v libovolném bodě mimo překážku, pokud známe stav pole v místě příčného omezení a vlastnosti překážky. Obecná možnost řešení úlohy spočívá ve výpočtu vlnové rovnice s okrajovými podmínkami určenými překážkou. Tento způsob se používá zejména u komplikovanějších úloh, kde se vyskytuje objemové prostředí s vnitřní modulací. Jiný způsob řešení je založen na výpočtu tzv. difrakčního integrálu. Pomocí integrace problému se s výhodou řeší zejména difrakce na hranách, otvorech či mřížkách v tenkých prostředích.

O první integrální řešení difrakční úlohy se pokusil již Fresnel na základě Huygensova principu (každý bod vlnoplochy se stává zdrojem sekundární kulové vlny, přičemž výslednou vlnoplochu lze získat jako obálku těchto sekundárních vlnoploch) a principu interference vln. Další autoři jeho myšlenku integrace příspěvků elementárních kulových vln již jen zdokonalovali (inklinační faktor, konzistence okrajových podmínek, vektorový přístup). Jinou možností řešení difrakční úlohy je přístup fourierovské optiky. Jedná se opět o skalární integrální metodu, která pracuje se systémem rovinných vln šířících se prostorem. Tvar difrakčního pole lze získat pomocí Fourierovy transformace a znalosti pole těsně za stínítkem.

Difrakční pole v ortogonálních souřadnicích x, y, z je možné zapsat pomocí difrakčního integrálu následujícím způsobem:

$$U_2(x, y, z) = \frac{iz}{\lambda} \iint_A U_1 \frac{\exp[-ik\sqrt{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + z^2}]}{(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + z^2} d\bar{x}d\bar{y} \quad (1)$$

kde \bar{x} a \bar{y} jsou souřadnice v místě stínítka, $U_1(\bar{x}, \bar{y}, 0)$ je známé pole na ploše apertury stínítka A a λ je vlnová délka světla. Pro praktická řešení difrakčního integrálu je nutné provést jeho přiblížení. Fresnelovo přiblížení (též parabolické nebo paraxiální) představuje v integrálu nahrazení kulové vlny parabolickou aproximací. Platí pro objekty mnohem větší než je vlnová délka světla. Další přiblížení, které je možné provést, se nazývá Fraunhoferovo přiblížení nebo přiblížení vzdáleného pole. Platí za předpokladu malých fázových variací v rámci objektu. V praxi je tato podmínka splněna předpokladem malé velikosti objektu vzhledem ke vzdálenosti místa sledování pole. S touto podmínkou souvisí zavedení tzv. Fresnelova čísla:

$$N_F = \frac{\bar{x}_{max}^2 + \bar{y}_{max}^2}{\lambda z} \quad (2)$$

kteřé dává do souvislosti rozměry objektu (apertury) $\bar{x}_{max}, \bar{y}_{max}$ se vzdáleností k místu sledování pole z a vlnovou délkou světla. Pokud velikost $N_F < 1/2$, pak se právě jedná o přiblížení vzdáleného pole a lze ukázat, že ve vzdálené difrakční zóně je difrakční pole, až na fázový člen, úměrné tvaru Fourierovy transformace pole těsně za stínítkem.

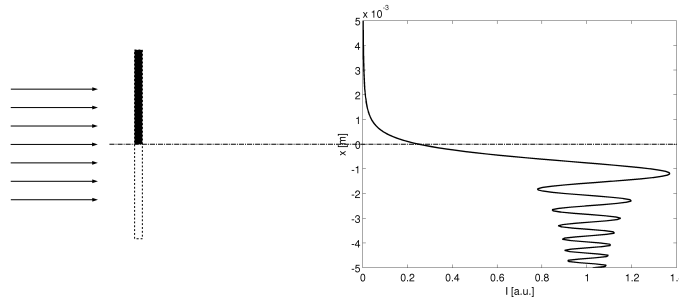
Zatímco Fresnelovo přiblížení klade podmínku na velikost objektu vzhledem k vlnové délce světla, pak Fraunhoferovo přiblížení klade další podmínku na velikost objektu, tentokrát ale vzhledem ke vzdálenosti místa pozorování difrakce. Ve Fresnelově zóně dochází k velkým změnám difrakčního obrazce. Pro difrakci ve Fraunhoferově zóně pak platí, že charakter difrakčního obrazce zůstává až na měřítko neměnný.

Difrakce světla na jednoduchých objektech

Difrakce na hraně – v tomto případě nelze provést Fraunhoferovu aproximaci, neboť difrakční oblast je nekonečná a není možné provést omezení na velikost objektu jako v případě $N_F < 1/2$. Úloha difrakce se řeší difrakčním integrálem a rozložení intenzity světla ve vzdálenosti z je dáno vztahem:

$$I(x, z) = \frac{1}{2} I_0 \left\{ \left[C(-\infty) - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} x\right) \right]^2 + \left[S(-\infty) - S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} x\right) \right]^2 \right\}, \quad (3)$$

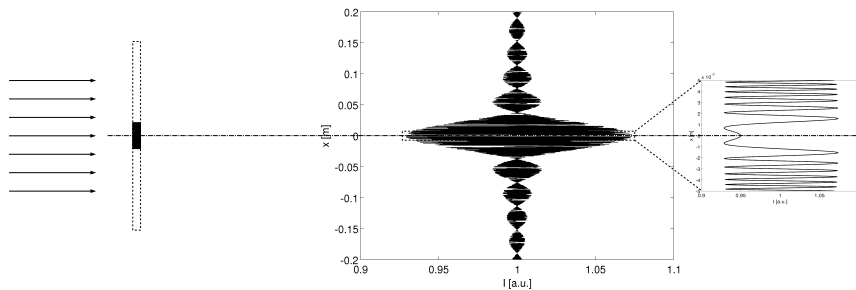
kde C a S jsou tabelované Fresnelovy integrály integrálkosinus a integrálsinus.



Obrázek 1: Difrakce rovinné vlny na hraně. Difrakční obrazec vypočten pro vlnovou délku $\lambda = 633 \text{ nm}$ a vzdálenost $z = 3 \text{ m}$.

Difrakce na pásu šířky a – v tomto případě opět neexistuje Fraunhoferova zóna a výsledné řešení difrakce lze zase získat pomocí difrakčního integrálu, který má tvar:

$$I(x, z) = \frac{1}{2} I_0 \left\{ \left[C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left\{x + \frac{a}{2}\right\}\right) + C(-\infty) - C(\infty) - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left\{x - \frac{a}{2}\right\}\right) \right]^2 + \left[S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left\{x + \frac{a}{2}\right\}\right) + S(-\infty) - S(\infty) - S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}} \left\{x - \frac{a}{2}\right\}\right) \right]^2 \right\}. \quad (4)$$



Obrázek 2: Difrakce rovinné vlny na pásu. Šíře pásu byla pro tento případ volena $a = 50 \mu\text{m}$, vzdálenost $z = 3 \text{ m}$ a vlnová délka použitého světla $\lambda = 633 \text{ nm}$.

Další způsob určení difrakčního pole pásu lze provést pomocí Babinetova principu. Známe-li difrakční pole komplementární překážky (v našem případě se jedná o štěrbinu stejné šířky jako pás), pak difrakční pole pásu vypočteme tak, že od celkového pole bez stínítka nebo překážky

odečteme difrakční pole štěrbin. Důsledkem tohoto tvrzení pak je, že ve vzdálené zóně (stanoví se z velikosti štěrbin) jsou obrazce dvou komplementárních překážek mimo centrální oblast téměř identické (viz obr. 2 a 3).

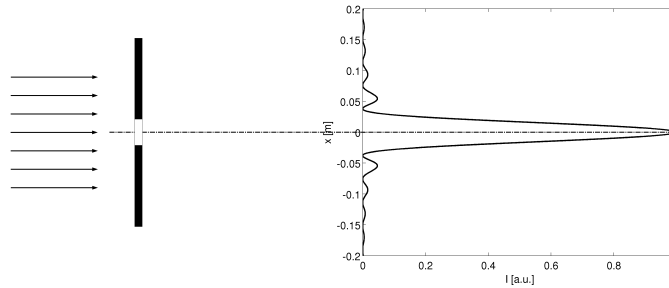
Difrakce na štěrbině šířky a – ve Fresnelově zóně lze rozložení intenzity světla vyjádřit:

$$I(x, z) = \frac{1}{2} I_0 \left\{ \left[C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\left\{x + \frac{a}{2}\right\}\right) - C\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\left\{x - \frac{a}{2}\right\}\right) \right]^2 + \left[S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\left\{x + \frac{a}{2}\right\}\right) - S\left(\sqrt{\frac{2}{\lambda z}}\left\{x - \frac{a}{2}\right\}\right) \right]^2 \right\}. \quad (5)$$

Ve vzdálené zóně lze použít jednodušší výraz odvozený pomocí fourierovského přístupu:

$$I(x, z) = I_0 \left(\frac{a}{\lambda z}\right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{ax}{\lambda z}\right). \quad (6)$$

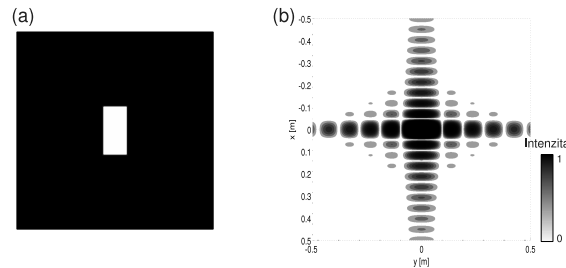
Z definice funkce $\text{sinc}(x) = \sin(\pi x)/(\pi x)$ lze nalézt podmínku pro polohy minim v difrakčním obrazci ve tvaru $x_m = m\lambda z/a$, kde m je libovolné celé číslo kromě nuly.



Obrázek 3: Difrakce rovinné vlny na štěrbině. Šířka štěrbin pro výpočet byla $a = 50 \mu\text{m}$, vzdálenost $z = 3 \text{ m}$ a vlnová délka světla $\lambda = 633 \text{ nm}$ (jedná se o vzdálenou zónu $N_F = 0,001$).

Difrakce na obdélníkovém otvoru o rozměrech $a \times b$ – ve vzdálené zóně platí pro rozložení intenzity následující výraz:

$$I(x, y, z) = I_0 \left(\frac{ab}{\lambda z}\right)^2 \text{sinc}^2\left(\frac{ax}{\lambda z}\right) \text{sinc}^2\left(\frac{by}{\lambda z}\right). \quad (7)$$

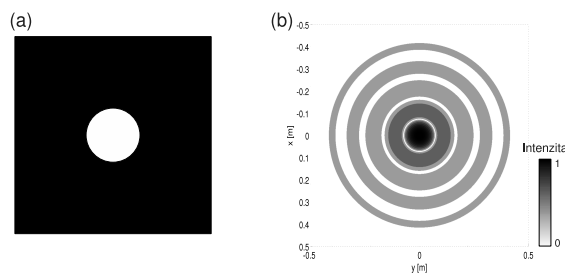


Obrázek 4: Difrakce rovinné vlny na obdélníkovém otvoru. Rozměry otvoru ve stínítku byly voleny $20 \times 50 \mu\text{m}^2$, vzdálenost $z = 3 \text{ m}$ a vlnová délka světla $\lambda = 633 \text{ nm}$ (vzdálená zóna). Mimo základní kříž se vyskytují další slabší maxima.

Difrakce na kruhové apertuře o průměru d – ve vzdálené difrakční zóně platí vztah pro intenzitu difraktovaného světla zapsanou v polárních souřadnicích:

$$I(r, z) = I_0 \frac{(\pi d^2)^2}{4\lambda^2 z^2} \left[\frac{J_1\left(\frac{\pi dr}{\lambda z}\right)}{\frac{\pi dr}{\lambda z}} \right]^2, \quad (8)$$

kde J_1 je Besselova funkce prvního druhu. Poloměry prvních minim jsou: $r_1 = 1,22\lambda z/d$, $r_2 = 2,23\lambda z/d$ a $r_3 = 3,24\lambda z/d$.



Obrázek 5: Difrakce rovinné vlny na kruhovém otvoru. Pro výpočet byl zvolen otvor o průměru $d = 20 \mu\text{m}$, vzdálenost byla $z = 3 \text{ m}$ a vlnová délka světla $\lambda = 633 \text{ nm}$ (opět vzdálená difrakční zóna).

Difrakce na mřížce

Optickou difrakční mřížkou nazýváme strukturu periodicky se opakujících elementů (štěrbín, proužků, vrypů apod.). Na každém z elementů dochází při dopadu světla k difrakci. Příspěvky z jednotlivých period se načítají a ve směrech konstruktivní interference vznikají difrakční řády. Rozložení difrakčních řádů vždy určuje perioda mřížky Λ . Rozlišuje se několik typů mřížek z hlediska vlastností prostředí a způsobu vytvoření. Amplitudové (též absorpční) mřížky moduluji amplitudu dopadající vlny a jsou vytvářeny v prostředí s periodicky proměnlivou absorpcí. U fázových mřížek zase dochází k modulaci fáze dopadající vlny a jsou realizovány v materiálech, kde se periodicky mění index lomu nebo reliéf. Z hlediska dalších vlastností se mřížky dělí na tenké a objemové (počet difrakčních řádů, závislost na úhlu dopadu nebo vlnové délce).

Tenká mřížka

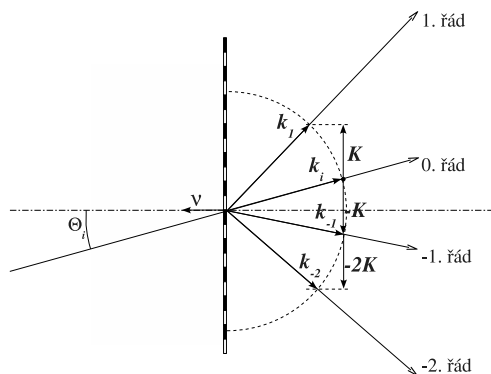
V případě tenkých mřížek světlo při průchodu interaguje jen s malým počtem period (prakticky se jedná o tenké prostředí s vyšší modulací indexu lomu, reliéfu nebo absorpce). Úlohu difrakce světla lze řešit pomocí metod skalární teorie difrakce. Jedním z důsledků je mřížková rovnice, která stanovuje rozložení difrakčních řádů. Lze ji zapsat obecně vektorově pomocí vlnových vektorů dopadající vlny \mathbf{k}_i , difraktované vlny do m -tého řádu \mathbf{k}_m , mřížkového vektoru \mathbf{K} (leží ve směru rozhraní) a normály k rozhraní mřížky ν takto:

$$(\mathbf{k}_m - \mathbf{k}_i - m\mathbf{K}) \times \nu = \mathbf{0} \quad (9)$$

nebo ve skalární podobě jako:

$$\sin \Theta_m - \sin \Theta_i = m \frac{\lambda}{\Lambda}, \quad (10)$$

kde Θ_i je úhel dopadu rovinné vlny na mřížku, Θ_m představuje úhel difrakce do m -tého difrakčního řádu, Λ je mřížková perioda a λ je vlnová délka dopadajícího světla.



Obrázek 6: Difrakce rovinné vlny na tenké mřížce při zvoleném úhlu dopadu.

Důležitým parametrem všech mřížek je jejich difrakční účinnost. Definuje se jako poměr výkonu v daném řádu ku výkonu vstupnímu, který dopadá na mřížku. Z teorie lze odvodit, že o účinnosti mřížky rozhoduje tvar funkce jedné periody a nikoliv její perioda. Z hlediska úhlu dopadu se ukazuje, že účinnost na něm nezávisí.

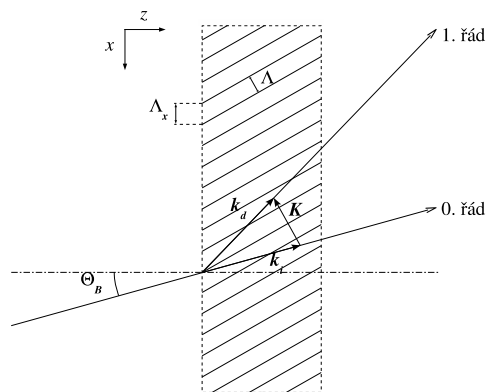
Objemová mřížka

U objemových mřížek je procházející vlna ovlivňována větším počtem period (prakticky se jedná o silnější materiály s nižší modulací indexu lomu nebo absorpce) a mřížkový vektor má obecně jinou orientaci než tečnou k rozhraní. Řešení úlohy je komplikovanější a lze jej získat například pomocí řešení vlnové rovnice. Při průchodu světla prostředím objemové mřížky dochází stejně jako u tenké mřížky k difrakci na jednotlivých periodách. Vznikající difraktované vlny spolu prostřednictvím mřížky při průchodu prostředím interagují a výsledek je takový, že kromě prvního a nultého řádu ostatní řády vlivem objemovosti zanikají. Navíc k maximálnímu posílení prvního řádu dojde jen při dopadu světla pod určitým úhlem (Braggův úhel Θ_B viz obr. 7). Při této konfiguraci platí tzv. Braggova podmínka, která svazuje vektory dopadající a difraktované rovinné vlny s mřížkovým vektorem, který v případě objemové mřížky může mít obecnou orientaci.

$$\mathbf{K} = \mathbf{k}_d - \mathbf{k}_i, \quad (11)$$

kde $|\mathbf{K}| = 2\pi/\Lambda$, Λ je perioda mřížky, \mathbf{k}_i je vektor dopadající vlny a \mathbf{k}_d vlny difraktované, jejichž velikosti jsou rovny $2\pi/\lambda$. Je možné si povšimnout, že v tomto případě je struktura mřížky totožná s interferenčním polem tvořeným vlnou dopadající a vlnou difraktovanou.

Rozpisem Braggovy podmínky do jednotlivých složek lze ukázat, že x -ová složka odpovídá mřížkové rovnici. Směr difrakce prvního řádu (ostatní jsou díky objemovosti potlačeny) je tedy určen stejně jako u tenkých mřížek mřížkovou rovnicí, kde určující perioda je hodnota periody ve směru rozhraní mřížky Λ_x . Účinnost mřížky velmi silně závisí na úhlu dopadu. V případě splnění Braggovy podmínky je maximální, při jejím porušení rapidně klesá. Závislost účinnosti prvního řádu objemové mřížky na rozladění Braggovy podmínky (různý úhel nebo vlnová délka dopadající vlny) se nazývá selektivní křivka.



Obrázek 7: Difrakce rovinné vlny na objemové mřížce při splnění Braggovy podmínky. Symetricky vzhledem k rovinám s konstantním index lomu lze v některých případech nalézt druhý úhel, při kterém dochází ke splnění Braggovy podmínky. V tomto případě dojde k výměně úhlu vlny dopadající a difraktované.

Omezená difrakční mřížka

Pokud dojde k omezení nekonečné difrakční mřížky (apertura, štěrbinu, úzký svazek), je difrakce rovinné vlny v každém řádu stejná, jako kdyby difraktovala rovinná vlna přímo na vlastní apertuře ve směru daného difrakčního řádu. Tento efekt ve vzdálené zóně lze matematicky popsat jako konvoluci spektra aperturní funkce a spektra nekonečné mřížky.

2 Zadání úlohy

Cíle

Pozorování difrakce laserového záření na hraně, drátu, štěrbině, obdélníkovém a kruhovém otvoru a difrakčních mřížkách. Stanovení velikostí vybraných objektů z difrakčního obrazce na stínítku. Určení prostorových period difrakčních mřížek a zjištění závislosti difrakční účinnosti na úhlu dopadu.

Pomůcky

Zdroj záření (He-Ne laser, $\lambda = 632,8 \text{ nm}$), nastavitelná štěrbina, sada obdélníkových a kruhových apertur, difrakční mřížky, wattmetr, měřítko, stínítko, držáčky, stojánky, pomocná optika a optická lavice.

Postup měření

1. Pozorování koherentního laserového záření na ostré hraně, drátu, štěrbině, obdélníkové a kruhové apertuře. Vymezení pojmů blízká a vzdálená zóna, souvislost s Fresnelovým číslem. Posouzení vlastností difrakce v jednotlivých zónách.
2. Určení velikostí různých štěrbin, obdélníkových a kruhových otvorů z difrakčního obrazce na stínítku ve vzdálené zóně. Ujasnění vztahu velikosti objektu s pozorovaným difrakčním obrazcem.
3. Pozorování difrakce na různých typech difrakčních mřížek (tenká amplitudová, tenká fázová a objemová fázová). Pozorování vlivu konečné omezenosti mřížek (kombinace mřížky a apertury).
4. Měření difrakční účinnosti prvního řádu tenké a objemové mřížky v závislosti na úhlu dopadu (selektivní křivka). Určení prostorové periody obou druhů měřených mřížek z polohy difrakčních řádů.
5. Pozorování disperze bílého nekoherentního světla při difrakci na mřížce.

3 Požadované výsledky

1. Popis a zdůvodnění charakteru difrakčního obrazce na hraně, drátu, štěrbinách, otvorech a difrakčních mřížkách z hlediska jejich geometrie a difrakčních zón. Diskuze platnosti Babinetova doplňkového principu při difrakci na drátu a štěrbině.
2. Výpočet šířky štěrbin a průměru kruhového otvoru z difrakčního obrazce při znalosti vlnové délky světla a vzdálenosti mezi překážkou a místem zobrazení difrakčního obrazce. (Alespoň dvě různé velikosti štěrbin a otvorů.)
3. Závislosti difrakční účinnosti prvních řádů tenké a objemové mřížky na úhlu dopadu (selektivní křivky).
4. Výpočet prostorových period tenké amplitudové, tenké fázové a objemové fázové mřížky.
5. Vysvětlení základních rozdílů difrakce na tenké a objemové mřížce.