Řešení 7. zadané úlohy - Jakub Kákona

1. Na základě fyzikálních procesů probíhajících v obvodu sestavíme stavové rovnice popisující systém:

$$v(t) = V_c(t) + v_R(t) = V_c(t) + Ri_c(t) = v_c(t) + RC\frac{dv_c(t)}{dt} \tag{1}$$

Napětí na obou větvích obvodu ale musí být stejné, proto zároveň platí:

$$v(t) = V_L(t) + v_R(t) = Lv_L(t) + Ri_L(t) = L\frac{di_L(t)}{dt} + Ri_L(t) \tag{2}$$

Celkový proud obvodem pak je:

$$i(t) = i_C(t) + i_L(t) = \frac{v(t) - v_c(t)}{R} + i_L(t) \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
y(t) &= i(t), && (4)\\
u(t) &= v(t), && (5)\\
x_1(t) &= v_C(t), && (6)\\
x_2(t) &= i_L(t), && (7)\\
u(t) &= x_1(t) + RC\dot{x_1}(t), && (8)\\
u(t) &= L\dot{x_2}(t) + Rx_2(t), && (9)\\
y(t) &= \tfrac{1}{R}u(t) - \tfrac{1}{R}x_1(t) + x_2(t) && (10)\\
& && (11)
\end{aligned}$$

Stavový popis přepíšeme do maticového tvaru:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \tag{12}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} x(t) + \frac{1}{R}u(t) \tag{13}$$

K určení impulzní odezvy potřebujeme přenos systému

$$\begin{aligned}
H(s) &= C[sI - A]^{-1}B + D && (14)\\
H(s) &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s + \frac{1}{RC} & 0 \\ 0 & s + \frac{R}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{1}{RC} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} + \frac{1}{R} && (15)\\
H(s) &= -\tfrac{1}{R^2C(s+RC)} + \tfrac{1}{L(s+\frac{R}{L})} + \tfrac{1}{R} && (16)
\end{aligned}$$

Z přenosu zjistíme impulzní odezvu:

$$h(t) = L^{-1}\{H(s)\} \tag{17}$$

Do popisu systému dosadíme předpoklad $\frac{1}{RC} = \frac{R}{L}$
Tím získáme následující tvar stavového popisu:

$$x(t) = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} \frac{R}{L} \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u(t) \tag{18}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 1 \end{bmatrix} x(t) + \frac{1}{R} u(t) \tag{19}$$

K převodu do Kalmanova tvaru potřebujeme matici řiditelnosti a pozorovatelnosti

$$C = [B, AB] = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} & -\frac{R^2}{L^2} \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L^2} \end{bmatrix} \tag{20}$$

$$O = \begin{bmatrix} C \\ AC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 1 \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \tag{21}$$

Hodnost obou matic je 1.

Určíme jádro matice O.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -\frac{1}{R} & 1 \\ \frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} &= 0 && (22) \\ \frac{1}{R} + b &= 0 && (23) \\ \frac{1}{L}a - \frac{R}{L}b &= 0 && (24) \\ b &= 1 && (25) \\ a &= R && (26) \end{aligned}$$

Jádrem matice je proto jeden vektor $ker(O) = \begin{bmatrix} R \\ 1 \end{bmatrix}$

Nyní můžeme sestavit transformační matici Q.

$$Q = [v_1, Q_n] = \begin{bmatrix} R & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{27}$$

Nyní lze určit Kalmanovu formu matic

$$\tilde{A} = Q^{-1}AQ = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & 0 \\ 0 & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{R}{L} & 0 \\ 0 & \frac{R}{L} \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$\tilde{B} = Q^{-1}B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

$$\tilde{C} = CQ = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \tag{30}$$

$$\tilde{D} = D = \frac{1}{R} \tag{31}$$

Vlastní čísla matice $\tilde{A}$ jsou pak dvojnásobná s hodnotou $-\frac{R}{L}$ jedno z nich je pak řiditelné a nepozorovatelné a druhé neřiditelné a nepozorovatelné.

Přenos systému zapsaný na základě Kalmanova tvaru je:

$$\tilde{H}(s) = \tilde{C}[sI - \tilde{A}]^{-1}\tilde{B} + \tilde{D} \tag{32}$$

$$\tilde{H}(s) = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - \frac{R}{L} & 0 \\ 0 & s - \frac{R}{L} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} + \frac{1}{R} \tag{33}$$

$$\tilde{H}(s) = \frac{1}{R} \tag{34}$$

Impulzní odezva pak je:

$$\tilde{h}(t) = L^{-1}\left\{\tilde{H}(s)\right\} = \frac{1}{R}\sigma(t) \tag{35}$$

2. Zadanou matici přepíšeme do tvaru:

$$H(s) = \frac{1}{d(s)}N(s) = \frac{1}{s(s+2)} \begin{bmatrix} (s-1)(s+2) & 0 & s(s-2) \\ 0 & (s+1)(s+2) & 0 \end{bmatrix} \tag{36}$$

Matici $N(s)$ je třeba převést do Smithova tvaru

$$S_N(s) = \begin{bmatrix} \epsilon_1(s) & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2(s) & 0 \end{bmatrix} \tag{37}$$

Kde $\epsilon_i(s) = \frac{D_i(s)}{D_{i-1}(s)}$

$$D_0(s) = 1, D_1(s) = 1, D_2(s) = (s+1)(s+2) \tag{38}$$

Smithova forma matice má pak tvar.

$$S_N(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & (s+1)(s+2) & 0 \end{bmatrix} \tag{39}$$

To ještě doupravíme na Smith-McMillanovu formu:

$$SM_H(s) = \frac{1}{d(s)}S_N(s) = \begin{bmatrix} \frac{\epsilon_1(s)}{\psi_1(s)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\epsilon_2(s)}{s} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{s(s+2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{s+1}{s} & 0 \end{bmatrix} \tag{40}$$

Póly $H(s)$ zjistíme z kořenů polynomu

$$P_H(s) = \psi_1(s)\psi_2(s) = s^2(s+2). \tag{41}$$

Tedy 0, 0, -2.

A nuly jsou kořeny polynomu

$$Z_H(s) = \epsilon_1(s)\epsilon_2(s) = s+1. \tag{42}$$

Nula proto je v -1.

3. Budeme potřebovat "systémovou matici"

$$P(s) = \begin{bmatrix} sI - A & B \\ -C & D \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s-1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & s-1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & s-1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{43}$$

Tuto matici ale potřebujeme spíše ve Smithově tvaru.

$$S_P(s) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (s-1)^3 \end{bmatrix} \tag{44}$$

Invariantní nuly najdeme řešením polynomu $z_P^I(s) = \epsilon_1(s)\epsilon_2(s)\epsilon_3(s)\epsilon_4(s) = (s-1)^3$. Invariantní nulou jeproto trojnásobná 1.